FFT——学习笔记

0XFF—FFT是啥?

> FFT是一种DFT的高效算法，称为快速傅立叶变换（fast Fourier transform），它根据离散傅氏变换的奇、偶、虚、实等 特性，对离散傅立叶变换的算法进行改进获得的。 —百度百科

对于两个多项式 $F(x)$ 和 $G(x)$ ，要求你将他们乘起来。

那还不简单？直接暴力相乘啊：

设 $F(x)$ 的系数数列为 C。

$$F(x)\times G(x)=C_nx^nG(x)+C_{n-1}x^{n-1}G(x)+C_{n-2}x^{n-2}G(x)\cdots C_2x^2G(x)+C_1x^1G(x)+C_0G(x)$$

这样下来需要做做 n 次**单项式乘多项式**，每次的时间复杂度 $O(n)$ ，则总复杂度高达 $O(n^2)$

基本上 n 上了4000 就会被卡吧……那怎么提速呢？

这就需要我们伟大而又神奇的神器：FFT **(快速博立叶变换)**

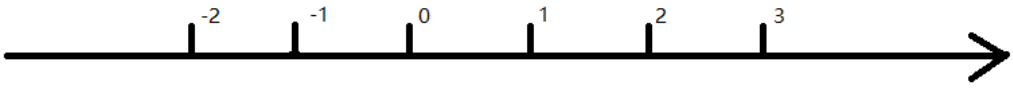
复杂度就只有 $O(nlogn)$ 了。

0X1F—FFT的前置知识.

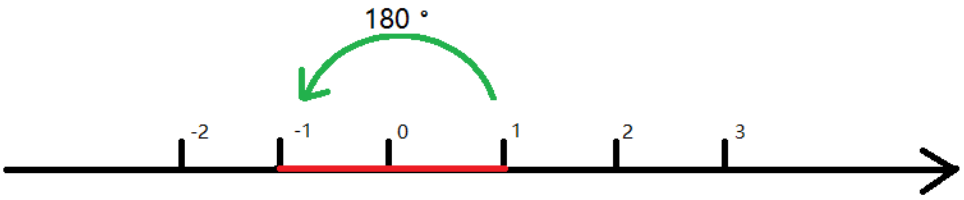
1.复数是什么?

> 我们把形如 $z=a+bi$（ a,b 均为实数）的数称为复数，其中 a 称为实部， b 称为虚部，i 称为虚数单位。当虚部等于零时，这个复数可以视为实数；当z的虚部不等于零时，实部等于零时，常称z为纯虚数。复数域是实数域的代数闭包，即任何复系数多项式在复数域中总有根。 复数是由意大利米兰学者卡当在十六世纪首次引入，经过达朗贝尔、棣莫弗、欧拉、高斯等人 的工作，此概念逐渐为数学家所接受。 —百度百科

想必大家都知道实数是啥(不知道重读幼儿园吧……)，实数位于数轴上，就像下图这样：



我们稍微观察一下，1 是怎么变到 -1 的呢？



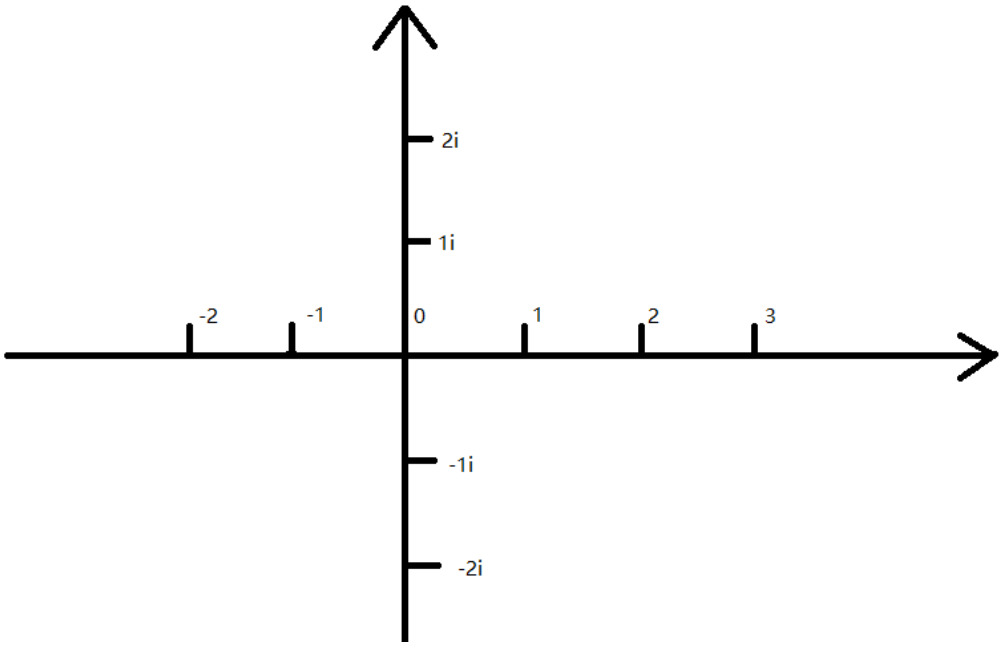
在数轴上转了 $180°$。

如果，是 $90°$ 的话，会发生什么呢？

这个时候，会转到 0 上面的位置，但是那里，好像没有数啊!

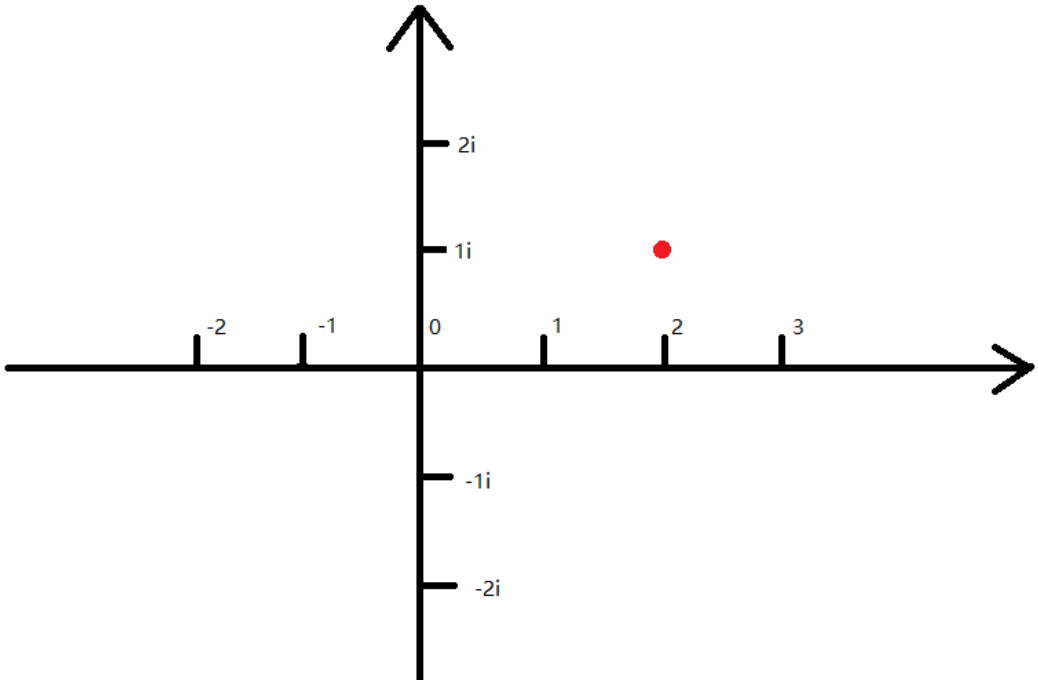
不对，其实是有的，只不过这个数不在实数轴上，而是在**虚数轴**上！

虚数轴的单位是 i ，我们可以这么表示：



嗯，对。这显然是一个平面坐标系。现在我们的数仅限于数轴上，如果是这个平面坐标系上的一个点怎么表达呢？

对于下面的红色点：



这个点的坐标很容易的可以得到：$(2, i)$ ，也可以表示成 $2 + i$.

你没猜错！这个就叫**复数**！

一个很重要的结论：**复数相乘时，模长相乘，幅角相加！**

2.点值表示法是什么?

我们用一个二维平面坐标系，在上面画 $N + 1$ 个点，最终可以解出一个 n 元的函数。证明略。

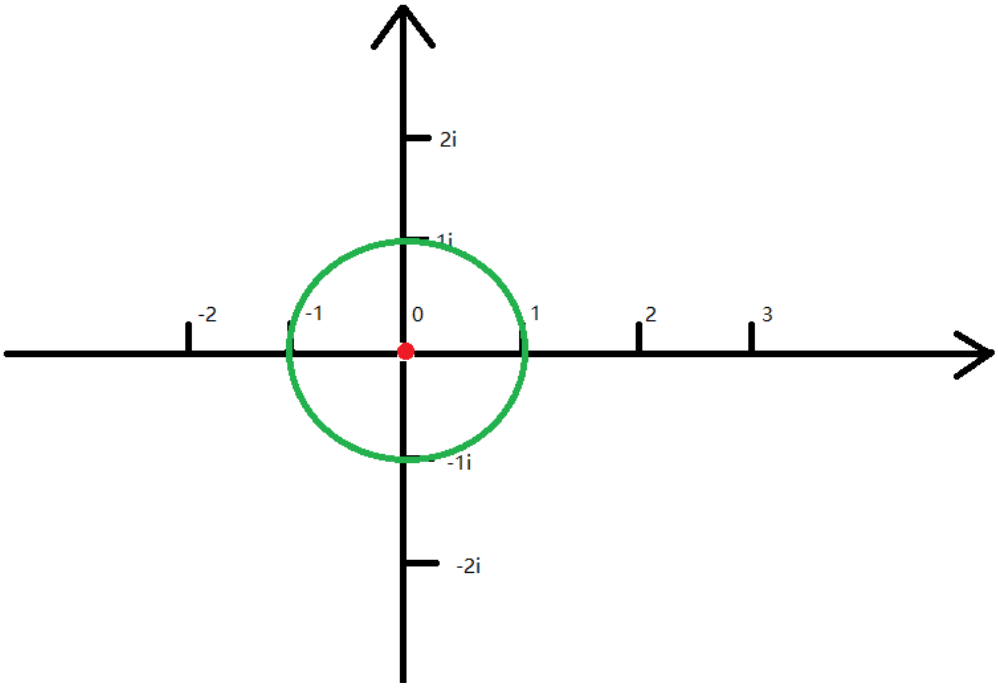
同样，我们可以用 $N - 1$ 个点来表达一个多项式。

因为点值相乘的复杂度只有 $O(n)$ 显然优秀许多。

3.单位根是什么?

***n次单位根(n为正整数)是n次幂为1的复数!**
***n次单位根(n为正整数)是n次幂为1的复数!**
***n次单位根(n为正整数)是n次幂为1的复数!**

我们先在复平面上画个点，就像这样：



Ta叫做**单位圆**。

圆边上的任意一点的模长都是 1.

只有单位圆上的点表示的复数才有可能成为n次单位根!

单位根的基本符号：ω

一个单位圆，我们将它切成 n 份，从 $(1,0)$ 开始旋转，每次旋转 $\frac{1}{n}\times 360$ 度，每次旋转后的点都记为 ω_n^k，特别的，ω_n^0 和 ω_n^n 都是 $(1,0)$ 点。

还有，当 $k>=n$ 或者 $k<0$ 时，ω_n^k 也是合法的。

单位根的性质：

1. 对于任意的 n，ω_n^0 都为 $(1,0)$ 点。
2. $\omega_n^a\times\omega_n^b=\omega_n^{a+b}$
3. $\omega_{an}^{ak}=\omega_n^k$
4. $(\omega_n^x)^y=(\omega_n^y)^x$
5. $\omega_n^{k+n/2}=-\omega_n^k$ if(n%2==0)

0X2F—FFT的求解过程.

- 分治思想很重要！

我们将多项式 $F(x)$ 按位置分成两块。

那么变成了(保证n是2的正整数次幂)：

$$F(x)=(C_0+C_2x^2+C_4x^4+\cdots+C_{n-2}x^{n-2})+(C_1x+C_3x^3+C_5x^5+\cdots+C_{n-1}x^{n-1})$$

设两个多项式 $F1(x),F2(x)$。

$$F1(x)=C_0+C_2x+C_4x^2+\cdots+C_{n-2}x^{n/2-1}$$
$$F2(x)=C_1x+C_3x+C_5x^2+\cdots+C_{n-1}x^{n/2-1}$$

则我们可以得出：

$$F(x)=F1(x^2)+F2(x^2)\times x$$

设 $k<n/2$ ，将 ω_n^k 带入多项式 $F(x)$.

$$F(\omega_n^k)=F1((\omega_n^k)2)+F2((\omega_n^k)^2)\times\omega_n^k$$

简化得： $F(\omega_n^k)=F1(\omega_{n/2}^k)+F2(\omega_{n/2}^k)\times\omega_n^k$

再假设 $k<n/2$ ，将 $\omega_n^{k+n/2}$ 带入多项式 $F(x)$.

$$F(\omega_n^{k+n/2})=F1((\omega_n^{k+n/2})2)+F2((\omega_n^{k+n/2})^2)\times\omega_n^k$$
$$F(\omega_n^{k+n/2})=F1(\omega_n^{2k+n})+F2(\omega_n^{2k+n})\times\omega_n^{k+n/2}$$
$$F(\omega_n^{k+n/2})=F1(\omega_n^{2k})+F2(\omega_n^{2k})\times\omega_n^{k+n/2}$$
$$F(\omega_n^{k+n/2})=F1(\omega_{n/2}^k)+F2(\omega_{n/2}^k)\times\omega_n^{k+n/2}$$
$$F(\omega_n^{k+n/2})=F1(\omega_{n/2}^k)-F2(\omega_{n/2}^k)\times\omega_n^k$$

比较一下两个式子：

- $F(\omega_n^k)=F1(\omega_{n/2}^k)+F2(\omega_{n/2}^k)\times\omega_n^k$
- $F(\omega_n^{k+n/2})=F1(\omega_{n/2}^k)-F2(\omega_{n/2}^k)\times\omega_n^k$

等式右边只有一个**负号**的差别!

这两个式子很关键！

0X3F—FFT的代码实现.

对于复数的使用

虽然 $C++STL$ 里面有复数 ($complex$) 但是太慢不建议大家使用。

你可以自己手打 $complex$

- 手打的 $complex$:

```
struct complex{complex(double a=0,double b=0){x=a,y=b;}double x,y;};
complex operator + (complex a,complex b){return complex(a.x+b.x,a.y+b.
y);}
```

```
complex operator - (complex a,complex b){return complex(a.x-b.x,a.y-b.
y);}
complex operator * (complex a,complex b){return complex(a.x*b.x-a.y*b.y,
a.x*b.y+a.y*b.x);}
```

- FFT:

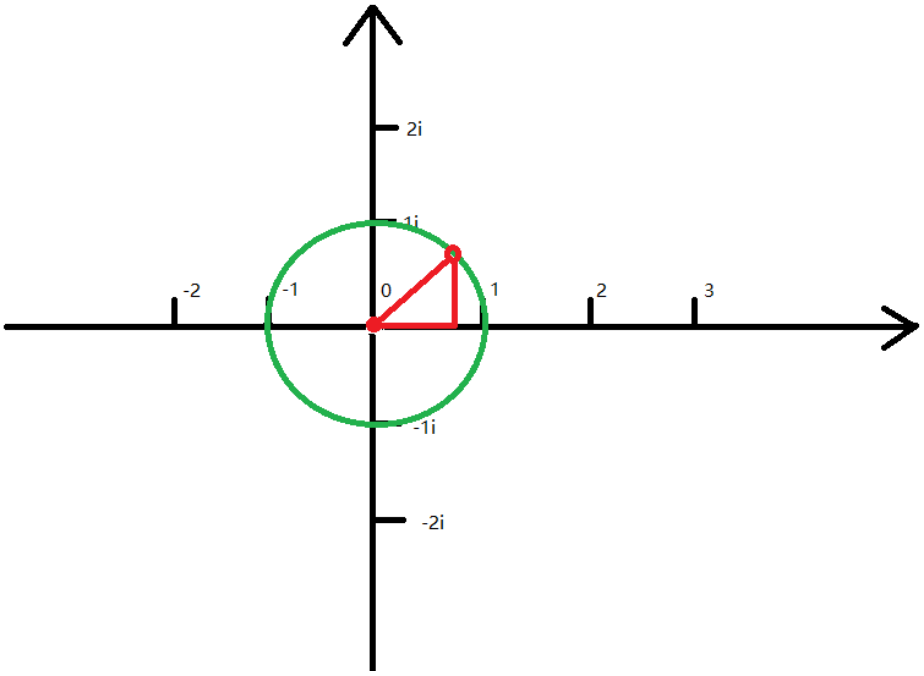
```
complex a[N],b[N];
inline void FFT(complex *f,int len,short inv){
    if(!len)return;complex f1[len+1],f2[len+2];
    for(int k=0;k<len;++k)f1[k]=f[k<<1],f2[k]=f[k<<1|1];//按位置分
    FFT(f1,len>>1,inv);FFT(f2,len>>1,inv);//递归处理子问题
    complex tmp=complex(cos(PI/len),inv*sin(PI/len)),buf=complex(1,0);

    /*tmp:做一次平方后坐标的变换*/ /*buf:初始位置*/

    for(RI k=0;k<len;++k){
        complex t=buf*f2[k];
        f[k]=f1[k]+t,f[k+len]=f1[k]-t;buf=buf*tmp;//按照公式还原
    }return;
}
//注意，inv的作用是判断是 "系数转点值" 还是 "点值转系数"
```

Code 中提到的公式是这两项：

- $F(\omega_n^k) = F1(\omega_{n/2}^k) + F2(\omega_{n/2}^k) \times \omega_n^k$
- $F(\omega_n^{k+n/2}) = F1(\omega_{n/2}^k) - F2(\omega_{n/2}^k) \times \omega_n^k$

对于文中的”坐标的变换”：

我们依旧来看单位圆：



实际上，这个坐标的变换，直接用园中的三角形，运用三角函数就可以得出解了。

过程略.

最后我们得到的结果是：$\omega_n^1 = (cos(\frac{2\pi}{n}), sin(\frac{2\pi}{n}))$

求出 ω_n^1 后将它乘 n 次，可以得到：$\omega_n^0, \omega_n^1, \omega_n^2, \omega_n^3, \omega_n^4, \omega_n^5 \cdots \omega_n^{n-1}$

贴出最终的代码：

```
#include<cstdio>
#include<cmath>
#include<string>
#define ll long long
#define RI register int
#define inf 0x3f3f3f3f
#define PI 3.1415926535898
using namespace std;
const int N=6e4+2;
template <typename _Tp> inline _Tp max(const _Tp&x,const _Tp&y){return x>
y?x:y;}
template <typename _Tp> inline _Tp min(const _Tp&x,const _Tp&y){return x<
y?x:y;}
template <typename _Tp> inline void IN(_Tp&x){
    char ch;bool flag=0;x=0;
    while(ch=getchar(),!isdigit(ch))if(ch=='-')flag=1;
    while(isdigit(ch))x=x*10+ch-'0',ch=getchar();
    if(flag)x=-x;
}
struct complex{complex(double a=0,double b=0){x=a,y=b;}double x,y;};
complex operator + (complex a,complex b){return complex(a.x+b.x,a.y+b.
y);}
complex operator - (complex a,complex b){return complex(a.x-b.x,a.y-b.
y);}
complex operator * (complex a,complex b){return complex(a.x*b.x-a.y*b.y,
a.x*b.y+a.y*b.x);}
complex a[N],b[N];
inline void FFT(complex *f,int len,short inv){
    if(!len)return;complex f1[len+1],f2[len+2];
    for(int k=0;k<len;++k)f1[k]=f[k<<1],f2[k]=f[k<<1|1];
    FFT(f1,len>>1,inv);FFT(f2,len>>1,inv);
    complex tmp=complex(cos(PI/len),inv*sin(PI/len)),buf=complex(1,0);
    for(RI k=0;k<len;++k){
        complex t=buf*f2[k];
        f[k]=f1[k]+t,f[k+len]=f1[k]-t;buf=buf*tmp;
    }return;
}
int n,m;
int main(){
    scanf("%d%d",&n,&m);
    for(RI i=0;i<=n;++i)scanf("%lf",&a[i].x);
```

```
    for(RI i=0;i<=m;++i)scanf("%lf",&b[i].x);
    for(m+=n,n=1;n<=m;n<<=1);
    FFT(a,n>>1,1);FFT(b,n>>1,1);
    for(int i=0;i<n;++i)a[i]=a[i]*b[i];
    FFT(a,n>>1,-1);
    for(int i=0;i<=m;++i)printf("%.0f ",fabs(a[i].x)/n);
    putchar('\n');
    return 0;
}
```

听说可以优化，那啥的我还不会，就到这吧.

过了一会儿……

“原来FFT小优化这么简单啊!”

0X4F—FFT的一些小优化.

不用递归：

```
递归版(数组下标，先偶后奇，从0开始):
0  1  2  3  4  5  6  7  --第1层
0  2  4  6 |1  3  5  7  --第2层
0  4 |2  6 |1  5 |3  7  --第3层
0 |4 |2 |6 |1 |5 |3| 7  --第4层
```

发现了什么吗？

最后的序列是原序列的二进制反转!

比如： $6=(110)_2$ 反过来变成了 $(011)_2=3$ ！

如何得到二进制翻转后的数列？递推即可!

```
for(RI i=0;i<n;++i)filp[i]=(filp[i>>1]>>1)|((i&1)?n>>1:0);
//filp[i] 即为 i 的二进制位翻转
```

Code:

```
#include<cstdio>
#include<cmath>
#include<string>
```

```
#define ll long long
#define RI register int
#define inf 0x3f3f3f3f
#define PI 3.1415926535898
using namespace std;
const int N=3e6+2;
int n,m,filp[N];
template <typename _Tp> inline _Tp max(const _Tp&x,const _Tp&y){return x>
y?x:y;}
template <typename _Tp> inline _Tp min(const _Tp&x,const _Tp&y){return x<
y?x:y;}
template <typename _Tp> inline void IN(_Tp&x){
    char ch;bool flag=0;x=0;
    while(ch=getchar(),!isdigit(ch))if(ch=='-')flag=1;
    while(isdigit(ch))x=x*10+ch-'0',ch=getchar();
    if(flag)x=-x;
}
struct complex{complex(double a=0,double b=0){x=a,y=b;}double x,y;};
complex operator + (complex a,complex b){return complex(a.x+b.x,a.y+b.
y);}
complex operator - (complex a,complex b){return complex(a.x-b.x,a.y-b.
y);}
complex operator * (complex a,complex b){return complex(a.x*b.x-a.y*b.y,
a.x*b.y+a.y*b.x);}
complex a[N],b[N];
inline void FFT(complex *f,short inv){
    for(RI i=0;i<n;++i)if(i<filp[i]){complex tmp=f[i];f[i]=f[filp[i]];f[f
ilp[i]]=tmp;}
    /*换位置*/
    for(RI p=2;p<=n;p<<=1){//每局区间长度
        RI len=p/2;//合并子区间的长度(所以是p/2)
        complex tmp=complex(cos(PI/len),inv*sin(PI/len));
        for(RI k=0;k<n;k+=p){//每局左端点
            complex buf=complex(1,0);
            for(RI l=k;l<k+len;++l){//遍历区间
                complex t=buf*f[len+l];
                f[len+l]=f[l]-t,f[l]=f[l]+t,buf=buf*tmp;//赋值有微小的变化,
注意顺序!
            }
        }
    }return;
}
/*主程序不变*/
int main(){
    scanf("%d%d",&n,&m);
    for(RI i=0;i<=n;++i)scanf("%lf",&a[i].x);
    for(RI i=0;i<=m;++i)scanf("%lf",&b[i].x);
    for(m+=n,n=1;n<=m;n<<=1);
    for(RI i=0;i<n;++i)filp[i]=(filp[i>>1]>>1)|((i&1)?n>>1:0);
    FFT(a,1);FFT(b,1);
    for(RI i=0;i<n;++i)a[i]=a[i]*b[i];
    FFT(a,-1);
```

```
    for(RI i=0;i<=m;++i)printf("%.0f ",fabs(a[i].x)/n);
    putchar('\n');
    return 0;
}
```

luogu上的题，递归的总是**T**最后一个点，改成非递归版的就**A**了？
emmmmmmmmmmmmmm

所有优化全开：

很作死，建议不要轻易尝试[滑稽]

```
#pragma GCC optimize(2)
#pragma GCC optimize(3)
#pragma GCC optimize("Ofast")
#pragma GCC optimize("inline")
#pragma GCC optimize("-fgcse")
#pragma GCC optimize("-fgcse-lm")
#pragma GCC optimize("-fipa-sra")
#pragma GCC optimize("-ftree-pre")
#pragma GCC optimize("-ftree-vrp")
#pragma GCC optimize("-fpeephole2")
#pragma GCC optimize("-ffast-math")
#pragma GCC optimize("-fsched-spec")
#pragma GCC optimize("unroll-loops")
#pragma GCC optimize("-falign-jumps")
#pragma GCC optimize("-falign-loops")
#pragma GCC optimize("-falign-labels")
#pragma GCC optimize("-fdevirtualize")
#pragma GCC optimize("-fcaller-saves")
#pragma GCC optimize("-fcrossjumping")
#pragma GCC optimize("-fthread-jumps")
#pragma GCC optimize("-funroll-loops")
#pragma GCC optimize("-fwhole-program")
#pragma GCC optimize("-freorder-blocks")
#pragma GCC optimize("-fschedule-insns")
#pragma GCC optimize("inline-functions")
#pragma GCC optimize("-ftree-tail-merge")
#pragma GCC optimize("-fschedule-insns2")
#pragma GCC optimize("-fstrict-aliasing")
#pragma GCC optimize("-fstrict-overflow")
#pragma GCC optimize("-falign-functions")
#pragma GCC optimize("-fcse-skip-blocks")
#pragma GCC optimize("-fcse-follow-jumps")
#pragma GCC optimize("-fsched-interblock")
#pragma GCC optimize("-fpartial-inlining")
#pragma GCC optimize("no-stack-protector")
#pragma GCC optimize("-freorder-functions")
```

```
#pragma GCC optimize("-findirect-inlining")
#pragma GCC optimize("-fhoist-adjacent-loads")
#pragma GCC optimize("-frerun-cse-after-loop")
#pragma GCC optimize("inline-small-functions")
#pragma GCC optimize("-finline-small-functions")
#pragma GCC optimize("-ftree-switch-conversion")
#pragma GCC optimize("-foptimize-sibling-calls")
#pragma GCC optimize("-fexpensive-optimizations")
#pragma GCC optimize("-funsafe-loop-optimizations")
#pragma GCC optimize("inline-functions-called-once")
#pragma GCC optimize("-fdelete-null-pointer-checks")
```

[滑稽][滑稽][滑稽][滑稽][滑稽][滑稽][滑稽][滑稽][滑稽][滑稽][滑稽]

最后，因为本人实在太弱了，太蒟了，所以实在写不出啥了。

---

byQiuly